ÉLECTRICITÉ. — *Remarques sur une expérience de M. Birkeland*; par M. **H. Poincaré**.

« M. Birkeland, en soumettant un tube de Crookes à l'action d'un aimant très puissant, a observé certains phénomènes nouveaux, qu'il était tenté d'attribuer à une sorte d'attraction ou de répulsion que les pôles magnétiques exerceraient sur les rayons cathodiques (*Archives des Sciences physiques et naturelles de Genève*, t. I, 4e période, juin 1896). Si un faisceau parallèle de rayons cathodiques est soumis à l'action d'un aimant rectiligne dont l'axe est parallèle à leur direction, ce faisceau devient convergent, et si la distance de l'aimant est convenable, il est concentré en un foyer très net, au point de fondre le verre en très peu de temps.

» Ce qui donne à cette observation son caractère paradoxal, c'est que les phénomènes ne changent pas quand on renverse les pôles de l'aimant.

» Cependant, en y réfléchissant un peu, on voit que tout peut s'expliquer sans faire intervenir aucune hypothèse nouvelle. Prenons l'axe des z parallèle au faisceau et passant par le pôle de l'aimant; considérons un rayon cathodique se dirigeant vers les z positifs; je le suppose situé dans le plan des xz du côté des x positifs; la force magnétique aura deux composantes, l'une Z parallèle à l'axe des z et dirigée vers les z positifs; elle est d'abord sans action; l'autre X parallèle à l'axe des x et dirigée vers les x négatifs; elle produit une déviation du rayon vers les y positifs par exemple; le rayon ainsi dévié a maintenant une composante η, parallèle à l'axe des y. La composante Z a alors une action sur cette composante η et produit une déviation du rayon vers les x négatifs; *d'où il résulte que le faisceau devient convergent*.

» Si l'on renverse les pôles de l'aimant, la composante X et par conséquent la composante η changent de signe; mais, comme la composante Z a également changé de signe, le rayon est toujours dévié vers les x négatifs et le faisceau reste convergent. Si, au contraire, on considère un faisceau *s'éloignant* de l'aimant, la même discussion prouve que, sous l'influence des mêmes causes, il devient divergent, ce qui est conforme aux expériences de M. Birkeland.

» Une discussion plus approfondie est nécessaire. Pour cela, nous écrirons les équations du rayon cathodique, en l'assimilant à une particule matérielle en mouvement rapide, chargée d'électricité; si l'hypothèse de Crookes n'est pas vraie, il semble bien que tout se passe comme si elle l'était.

» Supposons un seul pôle magnétique, que nous prendrons pour l'origine en conservant le même axe des z. Les équations s'écriront

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\lambda}{r^3}\left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right),$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\lambda}{r^3}\left(z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt}\right),$$
$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{\lambda}{r^3}\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right),$$
$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2;$$

où λ est un coefficient constant qui dépend de l'intensité de l'aimant et de la nature du rayon cathodique (c'est-à-dire, dans l'hypothèse de Crookes, de la masse de la particule matérielle en mouvement et de sa charge électrique.

» On trouve aisément

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = C,$$
$$r^2 = Ct^2 + 2Bt + A,$$

A, B et C étant trois constantes d'intégration.

» On trouve ensuite

$$y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt} = \frac{-\lambda x}{r} + a,$$
$$z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt} = \frac{-\lambda y}{r} + b,$$
$$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = \frac{-\lambda z}{r} + c,$$

a, b, c étant trois nouvelles constantes d'intégration liées aux trois premières par une relation simple.

» On tire de là

$$ax + by + cz = \lambda r,$$

ce qui prouve que le rayon reste sur un cône de révolution.

» Comme l'accélération est perpendiculaire à la vitesse et à la génératrice de ce cône, elle est normale au cône; d'où l'on doit conclure que *le rayon suit une ligne géodésique de ce cône de révolution.*

» En émanant de la cathode, loin de l'action de l'aimant, le rayon est sensiblement rectiligne et parallèle à l'axe des z; il a donc une asymptote rectiligne parallèle à l'axe des z.

» Soient

$$x = x_0, \qquad y = y_0$$

les équations de cette asymptote, V la vitesse du rayon. On aura

$$C = V^2; \qquad a = y_0 V; \qquad b = -x_0 V; \qquad c = \lambda.$$

» L'axe des z est donc une des génératrices du cône et le demi-angle au sommet du cône a pour sinus

$$\sin\omega = \frac{V}{\lambda}\sqrt{x_0^2 + y_0^2}.$$

» La plus courte distance du rayon cathodique à l'origine est égale à

$$\sqrt{x_0^2 + y_0^2}.$$

» Cela posé, remarquons que le rayon cathodique rencontrera l'axe des z en des points dont la distance à l'origine est

$$\frac{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}{\sin\varphi}, \qquad \frac{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}{\sin 2\varphi}, \qquad \frac{\sqrt{x_0^2 + y_0^1}}{\sin 3\varphi}, \qquad \cdots\cdot$$

» L'angle φ est le développement total du cône, c'est-à-dire

$$\varphi = 2\pi \sin\omega.$$

» Remarquons toutefois que la rencontre n'a pas lieu dans la partie utile si

$$\varphi > \pi, \quad \sin\omega > \tfrac{1}{2}.$$

» De même, les seules rencontres effectives sont celles qui correspondent aux multiples de φ plus petits que π.

» Qu'arrive-t-il alors? La cathode a la forme d'un disque circulaire de rayon ρ. Supposons qu'on règle la distance de l'aimant au tube de telle façon que l'un des rayons émanés du bord du disque (et tel par conséquent que $x_0^2 + y_0^2 = \rho^2$) vienne rencontrer l'axe des z précisément au point où cet axe perce la paroi du tube. Tous les autres rayons émanés du bord du disque viendront, par raison de symétrie, passer par ce même point; le rayon central qui est rectiligne et suit l'axe des z y passera également; les rayons intermédiaires ne s'en écarteront que fort peu, de sorte que tous les rayons paraîtront concentrés comme au foyer d'une lentille.

» Chaque système de rayons pourra donner plusieurs foyers correspondant aux divers multiples de φ plus petits que π; de plus il y a, comme M. Birkeland l'a montré, plusieurs espèces de rayons cathodiques, correspondant à plusieurs valeurs de λ. M. Birkeland a en effet constaté plusieurs foyers qui paraissent plutôt dus à la seconde de ces causes.

» Comment se comportent alors ceux des rayons cathodiques pour lesquels λ a une valeur trop grande pour qu'il se forme des foyers? On peut d'abord penser que la distance r, après avoir décrû jusqu'à un certain minimum, croît ensuite de nouveau et que ce sont eux qui produisent les anneaux lumineux observés par M. Birkeland sur la paroi latérale du tube. Mais une difficulté se présente. D'après la théorie, pour les rayons émanés normalement du plan du disque de la cathode, le minimum de r est $\sqrt{x_0^2 + y_0^2}$; il ne devrait donc se former d'anneaux lumineux latéraux que quand la distance du pôle magnétique au tube est plus petite que le rayon du disque. Est-ce que la théorie est incomplète, parce que nous avons supposé un pôle magnétique unique; ou bien plutôt les anneaux lumineux sont-ils dus à des rayons émanés obliquement du *bord* du disque et correspondant à une grande valeur de λ. »